Tentamen van Wiskunde 2, 3 juli 2002, 14:00-17:00 uur

Schrijf je naam + student nummer op ieder vel. Bij elke vraag wordt argumentatie verwacht. Alleen "ja", "nee" of "42" volstaat niet.

Opgave 1:

a) Vind de eigenwaarden en eigenruimtes van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Diagonaliseer A.
c) Bereken A^{10}.
d) Voor welke vectoren $v \in \mathbb{R}^3$ bestaat $\lim_{n\to\infty} A^n v$?

Opgave 2:

a) Vind de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' - 4y' + 4y = 0$.
b) Laat $V = C([0,1], \mathbb{R})$ met het inproduct $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ zijn. Vind een orthogonale basis van de in a) gevonden ruimte van oplossingen.
c) Vind de algemene oplossing van $y'' - 4y' + 4y = 7\cos t$.

Opgave 3:

Laat T de loodrechte spiegeling in het vlak $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ zijn.
a) Vind een basis β van eigenvectoren van T.
b) Vind de matrixvoorstelling $[T]_\beta^\beta$. Bewaart T de oriëntatie?
c) Neem $Y = \{U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \mid U \circ T = T \circ U\}$. Is Y een lineaire deelruimte van $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$?
d) Laat zien: Als $U \in Y$, dan zijn V en $V^\perp$ invariant onder U.
e) Wat is $\dim(Y)$? Hint: als $U \in Y$, concludeer uit d) hoe $[U]_\beta^\beta$ eruit moet zien.

Opgave 4:

Gegeven zijn de matrix en vector $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & p \\ 3 & 4 & 5 \\ p & 6 & 5 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 3 \end{pmatrix}$
a) Voor welke waarden van p is A singulier?
b) Hoeveel oplossing heeft $Ax = b$ voor elke waarde van $p \in \mathbb{R}$?
c) Herhaal onderdeel b) voor $A^2x = b$.